מבחן קורס מודלים חישוביים, חישוביות וסיבוכיות (67521)

מועד ב, 04.08.2021

מרצים: פרופ' אורנה קופרמן ופרופ' עודד שוורץ
מתרגלים: בדר אבו ראדי, יואב גרוס, מאיה דותן, אלון נצר ונעמה שמש-הלוי
צארים: מזור דוד ודנה סנדר

הוראות כלליות:

1. משך המבחן 3 שעות.
2. במבחן שלוש שאלות. בכל שאלה כמה סעיפים, ויש לענות על כולם.
3. השיבו על השאלות על גבי טופס זה בלבד. המחברות הן טיוטה ולא ייאספו.
4. במידה ואתם זקוקים למקום נוסף לצורך מענה על סעיף כלשהו, השתמשו בדפי התשובות הריקים המופיעים בסוף טופס זה. אם אתם זקוקים לדפי תשובות נוספים, עליכם לבקש מהמשגיח/ה טופס שלם נוסף, **אין להוסיף דפים בודדים**.
5. נסחו במדויק כל טענה בה אתם עושים שימוש. **מותר להשתמש בטענות שנלמדו בכיתה, בתרגול או בתרגיל** אלא אם נתבקשתם להוכיח אותן בשאלה.
6. השימוש בכל חומר עזר אסור.

בהצלחה!

חלק I. (34 נק')

יהי $\Sigma = \{0,1\}$.

נתבונן בשפה: $L = \{w: \text{זוגי } \#_0(w) \text{ זוגי וגם } |w| \text{ אי זוגי}\}$.

כלומר, L מכילה את כל המילים w כך שהאורך של w אי זוגי וגם מספר ה-0ים ב-w זוגי.

למשל: $1,010 \in L,\ 0,1010 \notin L$.

1. (7 נק')

ציירו DFA מינימלי לשפה L.

2. (7 נק')

הוכיחו שה-DFA שציירתם הוא מינימלי.

הוכחה:

3. (10 נק')

עבור מילה $x = x_1x_2 \dots x_n \in \Sigma^*$, נגדיר את המילה $third(x) = x_3x_6x_9 \dots x_{3\cdot\lfloor n/3 \rfloor}$ כמילה המתקבלת משרשור כל האותיות במקום שהוא $0 \; mod \; 3$ במילה x עד האות ה-$3 \cdot \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. לדוגמא: $third(aabbbaa) = ba$.

עבור שפה L, נגדיר: $third(L) = \{third(x): x \in L\}$. לדוגמא: $third(a^*) = a^*$.

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם $third(L)$ רגולרית, אז L רגולרית.

הטענה: נכונה לא נכונה (סמנו את בחירתכם)

הוכחה:

4. (10 נק')

עבור שפה $L \subseteq \Sigma^*$, נגדיר את השפה: $Inv\text{-}third(L) = \{y \in \Sigma^* : |y| = 0 \ mod \ 3 \wedge third(y) \in L\}$.

לדוגמה, $Inv\text{-}third(\{\epsilon, b\}) = \{\epsilon, aab, abb, bab, bbb\}$.

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: אם L חסרת הקשר, אז $Inv\text{-}third(L)$ חסרת הקשר.

הטענה: נכונה לא נכונה (סמנו את בחירתכם)

הוכחה:

חלק II. (26 נק')

5. (11 נק')

נתבונן בשפה: $L = \{\langle M_1, M_2 \rangle : w \in L(M_2)$ אז, M_1 מקבלת את w תוך 1000 צעדים, $w \in \Sigma^*$ לכל$\}$

לאיזו מחלקה שייכת L?

R $\quad$ $RE \setminus R$ $\quad$ $coRE \setminus R$ $\quad$ $\overline{RE \cup coRE}$ $\quad$ (סמנו את בחירתם)

הוכחה:

(15 נק')

6. אנומרטור קצת מבולבל עבור שפה L היא מכונת טיורינג עם מדפסת שמדפיסה את כל המילים שאינן ב-L בדיוק פעם אחת ומדפיסה את כל המילים ב-L לפחות פעמיים.

טענה: $L \in RE$ אמ"מ יש ל-L אנומרטור קצת מבולבל.

הטענה:	נכונה	לא נכונה	(סמנו את בחירתכם)
הוכחה:			

חלק III. (40 נק')

7. (8 נק')

תזכורת: אוטומט דטרמיניסטי $A = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F \rangle$ הוא שלם, אם המעבר $\delta(q, \sigma)$ מוגדר לכל $\sigma \in \Sigma, q \in Q$.

$ALL_{DFA} = \{\langle A \rangle :\ L(A) = \Sigma^*$ - ו A אוטומט סופי דטרמיניסטי שלם $\}$

טענה: $ALL_{DFA} \leq_L \overline{PATH}$.

הטענה: נכונה לא נכונה נכונות לא ידועה ותגרור את: (סמנו והוכחו)

PTIME=NL PSPACE=P PSPACE=coNP PSPACE=NP NP=coNP P=NP

הוכחה:

8. (8 נק')

טענה: $ALL_{NFA} \leq_p \overline{SAT}$. שימו לב, כעת מדובר ב-$ALL_{NFA}$, אוטומט הקלט הוא אי-דטרמיניסטי.

הטענה: נכונה לא נכונה נכונות לא ידועה ותגרור את: (סמנו והוכחו)

PTIME=NL PSPACE=P PSPACE=coNP PSPACE=NP NP=coNP P=NP

הוכחה:

9. (24 נק' לשאלות 9+10)

נאמר שגרף $G = \langle V, E \rangle$ הוא כמעט 3-צביע אם יש צביעה של V בשלושה צבעים כך שכל הקשתות למעט אולי קשת אחת מקיימות את דרישת הצביעה. כלומר, יש $c: V \to \{R, G, B\}$ ויש $E' \subseteq E$ כך ש- $|E'| \geq |E| - 1$ ולכל קשת $(u, v) \in E'$, מתקיים כי $c(u) \neq c(v)$.

נתבונן בשפה: $L = \{G:$ הוא כמעט 3 -צביע $\}$.

מהי מחלקת הסיבוכיות של L?

PSPACE coNP- complete NP- complete P NL- complete (סמנו את בחירתם)

הוכחה:

10. (24 נק' לשאלות 9+10)
נאמר שגרף $G = \langle V, E \rangle$ הוא כמעט 2-צביע אם נדרשים לפחות 3 צבעים כדי לצבוע אותו חוקית, אבל הסרה של 5 קשתות הופכת אותו ל-2 צביע. נתבונן בשפה: $L = \{G:$ הוא כמעט 2 -צביע $G\}$.

מהי מחלקת הסיבוכיות של L? האם L היא NP- complete או שניתן להכריע אותה ב-$PTIME$?

NP- complete $PTIME$ (סמנו את בחירתם)

הוכחה:

עמוד תשובות נוסף, מספר 1

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 2

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 3

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 4

המשך שאלה _____ סעיף _____

עמוד תשובות נוסף, מספר 5

המשך שאלה _____ סעיף _____